DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2010.01.006

文章编号:1001-3679(2010)01-0005-02

2个 Smarandache数列的均值

杨 明 顺

(渭南师范学院数学与信息科学系,陕西 渭南 714000)

摘要:利用初等方法研究了 2 个 Smarandache数列 a(n)和 b(n)的渐近性质,其中 a(n)表示不超过 n的最大平方部分,b(n)表示不小于 n的最小平方部分,给出了关于这 2 个数列的渐近公式。

关键词:平方部分;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 文献标识码:A

The Mean Value of Two Smarandache Sequences

YANG Ming-shun

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Shanxi Weinan 714000 PRC)

Abstract: The asymptotic properties of two Smarandache sequences a(n) and b(n) are studied by using the estimation of Dirichlet character sums, where a(n) is the largest square less than or equal to n, and b(n) is the smallest square greater than or equal to n. Two asymptotic formulae on these two sequences are given.

Key words: Square part; Mean value; Asymptotic formula

1 引言

对任意正整数 n,设 a(n)表示不超过 n的最大平方部分,b(n)表示不小于 n的最小平方部分。例如:a(1)=1,a(2)=1,a(3)=1,a(4)=4,a(5)=4,a(6)=4,…。b(1)=1,b(2)=4,b(3)=4,b(4)=4,b(5)=9,b(6)=9,…。在文献[1]的第 41个问题中,罗马尼亚数论专家 F Smarandache教授要求研究数列 a(n)和 b(n)的性质。关于这一问题,至今似乎没有人进行过研究,至少还没有看到任何有关它的论文。本文利用初等方法研究了这 2个数列的均值性质,给出了 2个渐近公式。

2 结论及证明

定理 1:对任一实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\Omega(a(n))=2x\ln\ln x+Cx+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中,$\Omega(n)$表示 n的所有素因数的个数,C是一个常数。

证明:首先证明定理 1。对任一实数 $x>1$,设 M是一固定的正整数且满足

$$M^2\leq x<(M+1)^2 \qquad (1)$$

则从 a(n)的定义有:

$$\sum_{n\leq x}\Omega(a(n))=\sum_{k=1}^{M}\sum_{(k-1)^2\leq n<k^2}\Omega(a(n))+\sum_{M^2\leq n\leq x}\Omega(a(n))=\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{k^2\leq n<(k+1)^2}\Omega(k^2)+\sum_{M^2\leq n<x}\Omega(M^2)$$

(下转第 10页)

收稿日期:2009-11-05;修订日期:2009-12-06

作者简介:杨明顺(1964-),陕西渭南人,副教授,研究方向:数论。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省教育厅基金项目(09JK432);渭南师范学院教改项目(JG200903)。

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

由于 $f^{(n)}(x)$在 x_0连续,只要 $|x-x_0|$充分小, $f^{(n)}(x)$与 $f^{(n)}(x_0)$同号。

不妨设 $f^{(n)}(x_0)>0$,则 $f''(x)$与 $(x-x_0)^{n-2}$同号。

当 n为偶数时, $f''(x)$在 x_0两侧同号, $(x_0, f(x_0))$不是拐点;

当 n为奇数时, $f''(x)$在 x_0两侧异号, $(x_0, f(x_0))$是拐点。

参考文献:

[1] 梁开福. 极值点与拐点关系的研究[J]. 数学理论与应用, 1999, 19(4): 30-31.

[2] 金秀岩, 龚洪强, 曾庆武. 高等数学(第 2版)[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2006.

(上接第 5页)

$$=\sum_{k=1}^{M-1}2(2k+1)\Omega(k)+O(\sum_{M^2\leq n<(M+1)^2}\Omega(M))=4\sum_{k=1}^{M}k\Omega(k)+O(M\ln M) \quad (2)$$

这里用到估计式 $\Omega(n)\ll\ln n$。

由文献[2]可得

$$\sum_{n\leq x}\Omega(n)=x\ln\ln x+Ax+O(\frac{x}{\ln x}) \quad (3)$$

其中, A是一个常数。设 $B(y)=\sum_{m\leq y}\Omega(m)$,由 Abel等式(参阅文献[3]中定理 4.2)及式(3)可得:

$$\sum_{k=1}^{M}k\Omega(k)=MB(M)-\int_2^M B(y)dy=M(M\ln\ln M+AM)-\int_2^M(y\ln\ln y+Ay)dy+O(\frac{M^2}{\ln M})=M^2\ln\ln M+AM^2-\frac{1}{2}(M^2\ln\ln M+AM^2)+O(\frac{M^2}{\ln M})=\frac{1}{2}M^2\ln\ln M+\frac{1}{2}AM^2+O(\frac{M^2}{\ln M}) \quad (4)$$

利用式(2)、式(3)、式(4)可得:

$$\sum_{n\leq x}\Omega(a(n))=2M^2\ln\ln M+2AM^2+O(\frac{M^2}{\ln M}) \quad (5)$$

其中, A是常数。

另一方面,从式(1)可得估计式:

$$0\leq x-M^2<(M+1)^2-M^2=2M+1\ll\sqrt{x} \quad (6)$$

和

$$\ln 2+\ln\ln M\leq\ln\ln x<\ln 2+\ln\ln(M+1)\leq\ln 2+\ln\ln M+O(\frac{1}{\sqrt{x}}) \quad (7)$$

结合式(5)、式(6)及式(7)立即可得:

$$\sum_{n\leq x}\Omega(a(n))=2x\ln\ln x+(2A-\ln 2)x+O(\frac{x}{\ln x})$$

这就完成了定理 1的证明。

对数列 $\{b(n)\}$,也可以得到类似的结论:

定理 2:对任一实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\Omega(b(n))=2x\ln\ln x+Cx+O(\frac{x}{\ln x})。$$

利用证明定理 1的方法,也可以得到定理 2的结论。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ House, 2004.

[2] Hardy G H, Ramanujan S. The normal number of prime factors of a umber n[J]. Quart J Math, 2005, 48: 76-92.

[3] Apstol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.